

Priamka a elipsa

treba riešiť sústavu rovníc

rovnica priamky (lineárna) + rovnica elipsy (kvadratická)

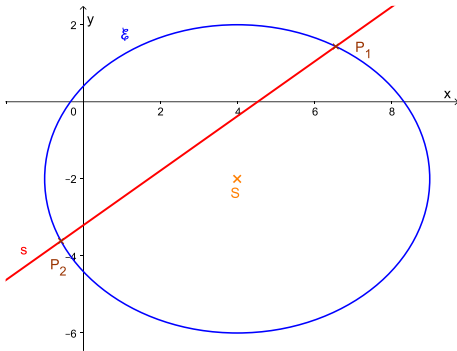
zlúčená rovnica → kvadratická

počet riešení sústavy = počet spoločných bodov priamky a elipsy

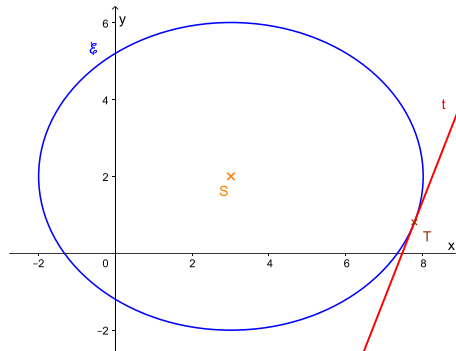
a, dve riešenia ⇒ dva spoločné body ($p \cap \mathcal{E} = \{P_1; P_2\}$) ⇒ **sečnica**

b, jedno riešenie ⇒ jeden spoločný bod ($p \cap \mathcal{E} = \{T\}$) ⇒ **dotyčnica**

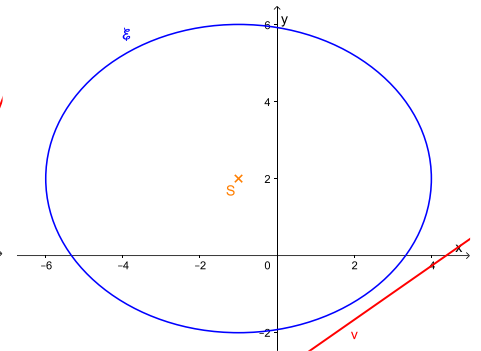
c, nemá riešenie ⇒ nemajú spoločný bod ($p \cap \mathcal{E} = \emptyset$) ⇒ **nesečnica** (vonkajšia priamka)



sečnica



dotyčnica



nesečnica

ak je daná elipsa a dotykový bod:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1; T(x_0; y_0)$$

$$\mathcal{E}: \frac{(y-v)^2}{a^2} + \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1; T(x_0; y_0)$$

potom rovnica dotyčnice:

$$t: \frac{(x_0-u) \cdot (x-u)}{a^2} + \frac{(y_0-v) \cdot (y-v)}{b^2} = 1$$

$$t: \frac{(y_0-v) \cdot (y-v)}{a^2} + \frac{(x_0-u) \cdot (x-u)}{b^2} = 1$$

príklad:

Vypočítajte súradnice priesečníkov elipsy s priamkou:

a, $\mathcal{E}: 9x^2 + 25y^2 = 225$

a: $y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$

b, $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 + 2x - 32y - 35 = 0$

b: $2x + 3y + 15 = 0$

c, $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$

c: $x = 3 + t$

$y = -5 + 5t$

d, $\mathcal{E}: 25x^2 + 9y^2 + 100x + 54y - 719 = 0$

d: $20x + 9y - 83 = 0$

a, dosadíme do rovnice elipsy

$$9x^2 + 25\left(\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}\right)^2 = 225$$

umocnime

$$9x^2 + 25 \cdot \left(\frac{9}{25}x^2 - \frac{18}{25}x + \frac{9}{25}\right) = 225$$

$$9x^2 + 9x^2 - 18x + 9 = 225$$

anulujeme rovnicu a delíme

$$18x^2 - 18x - 216 = 0$$

$$/:18$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$x+3=0$$

$$x-4=0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 4$$

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -12$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

má dve riešenia ⇒ priamka a je sečnicou

$$y_1 = \frac{3}{5} \cdot 4 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$y_2 = \frac{3}{5} \cdot (-3) - \frac{3}{5} = -\frac{9}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{12}{5} = -2,4$$

$$P_1\left(4; \frac{9}{5}\right); P_2\left(-3; -\frac{24}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{b, } 2x + 3y + 15 &= 0 \\ 2x &= -3y - 15 \\ x &= -\frac{3y+15}{2} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{3y+15}{2}\right)^2 + 4y^2 + 2\left(-\frac{3y+15}{2}\right) - 32y - 35 = 0$$

$$\frac{9y^2+90y+225}{4} + 4y^2 - 3y - 15 - 32y - 35 = 0$$

$$\frac{9y^2+90y+225}{4} + 4y^2 - 35y - 50 = 0 \quad / \cdot 4$$

$$9y^2 + 90y + 225 + 16y^2 - 140y - 200 = 0$$

$$25y^2 - 50y + 25 = 0 \quad / : 25$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y - 1)^2 = 0$$

$$y = 1$$

má jedno riešenie \Rightarrow priamka b je dotyčnicou

$$x = -\frac{3 \cdot 1 + 15}{2} = -\frac{18}{2} = -9$$

$$T(-9; 1)$$

$$\text{c, } \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1 \quad / \cdot 100$$

$$25(x-4)^2 + (y+2)^2 = 100$$

$$25(3+t-4)^2 + (-5+5t+2)^2 = 100$$

$$25(t-1)^2 + (5t-3)^2 = 100$$

$$25(t^2 - 2t + 1) + 25t^2 - 30t + 9 = 100$$

$$25t^2 - 50t + 25 + 25t^2 - 30t + 9 = 100$$

$$50t^2 - 80t + 34 = 100 \quad / -100$$

$$50t^2 - 80t - 66 = 0 \quad / : 2$$

$$25t^2 - 40t - 33 = 0$$

$$a = 25$$

$$b = -40$$

$$c = -33$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-33)}}{2 \cdot 25} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 3300}}{50} = \frac{40 \pm 70}{50} = \begin{cases} \nearrow \frac{11}{5} = 2,2 \\ \searrow -\frac{3}{5} = -0,6 \end{cases}$$

má dve riešenia \Rightarrow priamka c je sečnicou

$$x_1 = 3 + 2,2 = 5,2 = \frac{26}{5}$$

$$y_1 = -5 + 5 \cdot 2,2 = -5 + 11 = 6$$

$$x_2 = 3 - 0,6 = 2,4 = \frac{12}{5}$$

$$y_2 = -5 + 5 \cdot (-0,6) = -5 - 3 = -8$$

$$P_1\left(\frac{26}{5}; 6\right); P_2\left(\frac{12}{5}; -8\right)$$

$$\begin{aligned} \text{d, } 20x + 9y - 83 &= 0 \\ 9y &= 83 - 20x \\ y &= \frac{83-20x}{9} \end{aligned}$$

$$25x^2 + 9 \cdot \left(\frac{83-20x}{9}\right)^2 + 100x + 54 \cdot \frac{83-20x}{9} - 719 = 0$$

$$25x^2 + 9 \cdot \frac{6889 - 3320x + 400x^2}{81} + 100x + 6(83 - 20x) - 719 = 0$$

$$25x^2 + \frac{6889 - 3320x + 400x^2}{9} + 100x + 498 - 120x - 719 = 0 \quad / \cdot 9$$

$$225x^2 + 6889 - 3320x + 400x^2 - 180x - 1989 = 0$$

$$625x^2 - 3500x + 4900 = 0 \quad / : 25$$

$$25x^2 - 140x + 196 = 0$$

$$a = 25 \qquad b = -140 \qquad c = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-140) \pm \sqrt{(-140)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 196}}{2 \cdot 25} = \frac{140 \pm \sqrt{19\,600 - 19\,600}}{50} = \frac{140 \pm 0}{50} = \frac{14}{5} = 2,8$$

má jedno riešenie \Rightarrow priamka d je dotyčnicou

$$y = \frac{83 - 20 \cdot 2,8}{9} = \frac{83 - 56}{9} = 3$$

$$T\left(\frac{14}{5}; 3\right)$$

Napište rovnicu dotyčnice elipsy v bode T: $x^2 + 25y^2 - 4x + 50y - 71 = 0$; $T(-6; y_T < 0)$

vypočítame chýbajúcu súradnicu dotykového bodu – dosadíme do rovnice elipsy

$$\begin{aligned} (-6)^2 + 25y^2 - 4(-6) + 50y - 71 &= 0 \\ 36 + 25y^2 + 24 + 50y - 71 &= 0 \\ 25y^2 + 50y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 25 \qquad b = 50 \qquad c = -11$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-11)}}{2 \cdot 25} = \frac{-50 \pm \sqrt{2\,500 + 1\,100}}{50} = \frac{-50 \pm 60}{50} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{5} = 0,2 \\ \searrow -\frac{11}{5} = -2,2 \end{matrix}$$

$$T(-6; -2,2)$$

nakoľko iba parametrická rovnica priamky obsahuje súradnice bodu, ktorým prechádza:

$$t: x = -6 + s_1 t$$

$$y = -2,2 + s_2 t$$

kde smerový vektor dotyčnice je: $\vec{s}(s_1; s_2)$

ak dotyčnica nie je rovnobežná ani jednou z ôs, jednu súradnicu si môžeme zvoliť (nie 0)

nech: $s_2 = 1$

$$\vec{s}(s_1; 1)$$

$$t: x = -6 + s_1 t = s_1 t - 6$$

$$y = -2,2 + 1 \cdot t = t - 2,2$$

dosadíme do rovnice elipsy

$$(s_1 \cdot t - 6)^2 + 25(t - 2,2)^2 - 4(s_1 \cdot t - 6) + 50(t - 2,2) - 71 = 0$$

odstránime zátvorky

$$s_1^2 t^2 - 12s_1 t + 36 + 25(t^2 - 4,4t + 4,84) - 4s_1 t + 24 + 50t - 110 - 71 = 0$$

$$s_1^2 t^2 - 16s_1 t + 50t - 121 + 25t^2 - 110t + 121 = 0$$

$$s_1^2 t^2 + 25t^2 - 16s_1 t - 60t = 0$$

vyjmeme vo dvojiciach t^2 a t , aby bol iba jeden kvadratický a jeden lineárny člen

$$t^2(s_1^2 + 25) + t(-16s_1 - 60) = 0$$

$$a = s_1^2 + 25$$

$$b = -16s_1 - 60$$

$$c = 0$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-16s_1 - 60)^2 - 4 \cdot (s_1^2 + 25) \cdot 0 = (-16s_1 - 60)^2$$

$$(-16s_1 - 60)^2 = 0$$

$$-16s_1 - 60 = 0$$

$$-16s_1 = 60$$

$$s_1 = -\frac{15}{4} = -3,75$$

$$\vec{s}\left(-\frac{15}{4}; 1\right) \sim (-15; 4)$$

takže konečný tvar parametrickej rovnice dotyčnice:

$$t: x = -6 - 15t \quad /.4$$

$$y = -2,2 + 4t \quad /.15$$

$$4x = -24 - 60t$$

$$15y = -33 + 60t$$

$$4x + 15y = -57$$

$$t: 4x + 15y + 57 = 0$$

Napíšte rovnicu dotyčnice k elipse, ktorá je rovnobežná s danou priamkou:

a, $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

a: $5x - 8y + 4 = 0$

b, $\mathcal{E}: 25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y - 359 = 0$

b: $x = 5 + 3t$

$y = -2 + 10t$

a,

zo všeobecnej rovnice priamky určíme normálový vektor: $\vec{n}(5; -8)$

priamka, ktorá má byť rovnobežná s danou priamkou, má aj normálový vektor rovnobežný s daným normálovým vektorom \rightarrow môžeme aj ten použiť

poznáme normálový vektor dotyčnice \Rightarrow píšeme predbežný tvar všeobecnej rovnice dotyčnice

t: $5x - 8y + q = 0$

treba určiť hodnotu q tak, aby priamka bola dotyčnicou (aby sústava mala jedno riešenie)

vyjadríme x z rovnice dotyčnice

$$5x = 8y - q$$

$$x = \frac{8y - q}{5}$$

dosadíme do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) elipsy

$$25x^2 + 36y^2 = 900$$

$$25 \cdot \left(\frac{8y - q}{5}\right)^2 + 36y^2 = 900$$

umocníme; krátime; zlúčime členy a anulujeme rovnicu

$$25 \cdot \frac{64y^2 - 16qy + q^2}{25} + 36y^2 = 900$$

$$64y^2 - 16qy + q^2 + 36y^2 = 900$$

$$100y^2 - 16qy + q^2 = 900$$

$$100y^2 - 16qy + q^2 - 900 = 0$$

$$a = 100$$

$$b = -16q$$

$$c = q^2 - 900$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D : jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-16q)^2 - 4 \cdot 100 \cdot (q^2 - 900) = 256q^2 - 400q^2 + 360\,000 = -144q^2 + 360\,000$$

$$-144q^2 + 360\,000 = 0 \quad /+144q^2$$

$$360\,000 = 144q^2 \quad /:144$$

$$2\,500 = q^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$50 = |q|$$

$$q_1 = -50$$

$$q_2 = 50$$

$$t_1: 5x - 8y - 50 = 0$$

$$t_2: 5x - 8y + 50 = 0$$

b,

z parametrickej rovnice priamky určíme smerový vektor: $\vec{s}(3; 10)$

priamka, ktorá má byť rovnobežná s danou priamkou, má aj smerový vektor rovnobežný s daným smerovým vektorom \rightarrow môžeme aj ten použiť

poznáme smerový vektor dotyčnice \Rightarrow píšeme predbežný tvar parametrickej alebo smernicovej rovnice dotyčnice

$$k_t = \frac{s_2}{s_1} = \frac{10}{3}$$

t: $y = \frac{10}{3}x + q$

$$25x^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{3}x + q\right)^2 + 50x - 16 \cdot \left(\frac{10}{3}x + q\right) - 359 = 0$$

$$25x^2 + 4 \cdot \left(\frac{100}{9}x^2 + \frac{20}{3}qx + q^2\right) + 50x - \frac{160}{3}x - 16q - 359 = 0$$

$$25x^2 + \frac{400}{9}x^2 + \frac{80}{3}qx + 4q^2 + 50x - \frac{160}{3}x - 16q - 359 = 0$$

$$\frac{625}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{80}{3}qx + 4q^2 - 16q - 359 = 0$$

$$\frac{625}{9}x^2 + x \cdot \left(-\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q\right) + 4q^2 - 16q - 359 = 0$$

$$a = \frac{625}{9}$$

$$b = -\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q$$

$$c = 4q^2 - 16q - 359$$

$$D = b^2 - 4ac = \left(-\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q\right)^2 - 4 \cdot \frac{625}{9} \cdot (4q^2 - 16q - 359) =$$

$$= \frac{100}{9} - \frac{1600}{9}q + \frac{6400}{9}q^2 - \frac{10000}{9}q^2 + \frac{40000}{9}q + \frac{697500}{9} = -400q^2 + \frac{12800}{3}q + \frac{299200}{3}$$

$$-400q^2 + \frac{12800}{3}q + \frac{299200}{3} = 0 \quad / \cdot \left(-\frac{3}{400}\right)$$

$$3q^2 - 32q - 748 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-748)}}{2 \cdot 3} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 + 8976}}{6} = \frac{32 \pm 100}{6} = \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} -\frac{34}{3} = -11, \bar{3}$$

$$t_1: y = \frac{10}{3}x + 22$$

$$t_1: 10x - 3y + 66 = 0$$

$$t_2: y = \frac{10}{3}x - \frac{34}{3}$$

$$t_2: 10x - 3y - 34 = 0$$

Napište rovnici dotyčnice k elipse, která je kolmá na danú priamku:

a, $\mathcal{E}: 25x^2 + 9y^2 = 900$

a: $y = -\frac{4}{5}x + 8$

b, $\mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

b: $24x - 9y + 472 = 0$

a,

zo smernicovej rovnice priamky určíme smernicu a smerový vektor priamky

$$k_a = -\frac{4}{5} \Rightarrow \vec{s}_a(5; -4)$$

kolmé priamky majú smerové vektory kolmé

$$\vec{s}_a \perp \vec{s}_t \Rightarrow \vec{s}_t(4; 5) \Rightarrow k_t = \frac{5}{4}$$

napišeme predbežný tvar smernicovej rovnice hľadanej dotyčnice

$$t: y = \frac{5}{4}x + q$$

dosadíme do rovnice elipsy

$$25x^2 + 9\left(\frac{5}{4}x + q\right)^2 = 900$$

$$25x^2 + 9\left(\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{2}qx + q^2\right) = 900$$

$$25x^2 + \frac{225}{16}x^2 + \frac{45}{2}qx + 9q^2 = 900$$

$$\frac{625}{16}x^2 + \frac{45}{2}qx + 9q^2 - 900 = 0$$

$$a = \frac{625}{16}$$

$$b = \frac{45}{2}q$$

$$c = 9q^2 - 900$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{45}{2}q\right)^2 - 4 \cdot \frac{625}{16} \cdot (9q^2 - 900) = \frac{2025}{4}q^2 - \frac{5625}{4}q^2 + 140625 = -900q^2 + 140625$$

$$-900q^2 + 140625 = 0 \quad / +900q^2$$

$$140625 = 900q^2 \quad / :900$$

$$\frac{625}{4} = q^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\frac{25}{2} = |q|$$

$$\frac{25}{2} = q_1$$

$$-\frac{25}{2} = q_2$$

$$t_1: y = \frac{5}{4}x + \frac{25}{2}$$

$$t_1: 5x - 4y + 50 = 0$$

$$t_2: y = \frac{5}{4}x - \frac{25}{2}$$

$$t_2: 5x - 4y - 50 = 0$$

b, $\vec{n}_b(24; -9)$

$$t \perp b \Rightarrow \vec{n}_t \perp \vec{n}_b \Rightarrow \vec{n}_t(9; 24) \sim (3; 8)$$

$$t: 3x + 8y + q = 0$$

$$8y = -3x - q$$

$$y = \frac{-3x - q}{8}$$

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad /.100$$

$$(x-3)^2 + 4y^2 = 100$$

$$(x-3)^2 + 4 \cdot \left(\frac{-3x-q}{8}\right)^2 = 100$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4 \cdot \frac{9x^2 + 6qx + q^2}{64} = 100$$

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{9x^2 + 6qx + q^2}{16} = 100 \quad /.16$$

$$16x^2 - 96x + 144 + 9x^2 + 6qx + q^2 = 1600 \quad /-1600$$

$$25x^2 + x(-96 + 6q) + q^2 - 1456 = 0$$

$$a = 25$$

$$b = -96 + 6q$$

$$c = q^2 - 1456$$

$$D = b^2 - 4ac = (-96 + 6q)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (q^2 - 1456) = 9216 - 1152q + 36q^2 - 100q^2 + 145600 =$$

$$= -64q^2 - 1152q + 154816$$

$$-64q^2 - 1152q + 154816 = 0 \quad /:(-64)$$

$$q^2 + 18q - 2419 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2419)}}{2 \cdot 1} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 9676}}{2} = \frac{-18 \pm 100}{2} = \begin{matrix} \nearrow 41 \\ \searrow -59 \end{matrix}$$

$$t_1: 3x + 8y - 59 = 0$$

$$t_2: 3x + 8y + 41 = 0$$