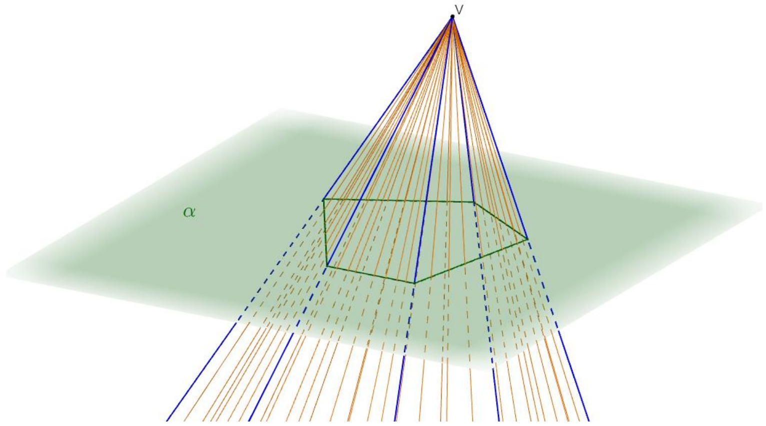
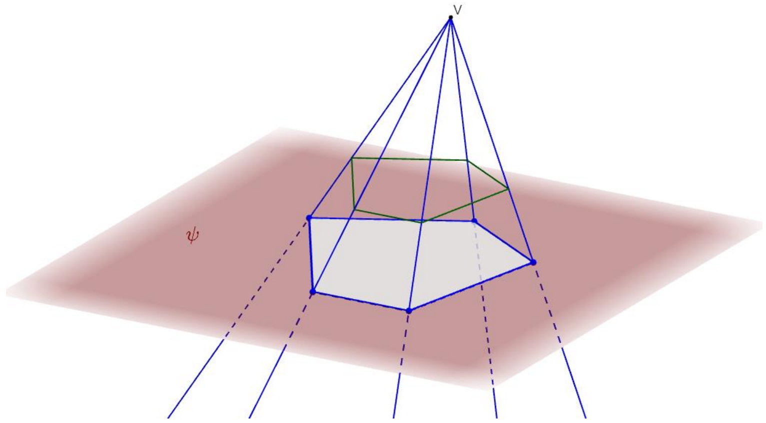
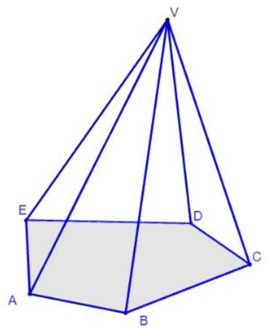
Povrch a objem ihlana

D. Daný je mnohouholník (***riadiaci*** alebo ***určujúci útvar***) a jeden bod (***vrchol***), ktorý neleží v rovine mnohouholníka. Ak hraničnými bodmi mnohouholníka (stranami) vedieme polpriamky s počiatočným bodom V, vznikne nekonečná ihlanová plocha – nekonečný ihlan. Ak teraz zoberieme rovinu, ktorá prechádza ihlanovou plochou, vznikne ***ihlan***, ako časť nekonečnej ihlanovej plochy medzi rovinou a vrcholom.

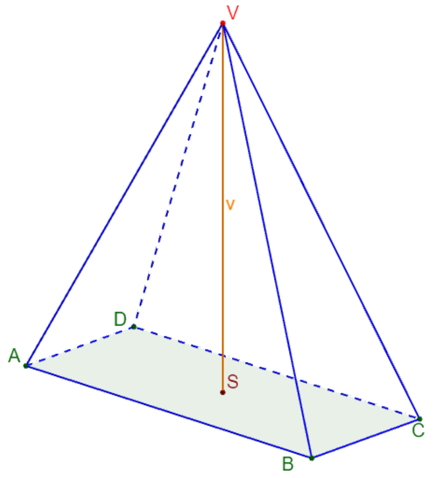




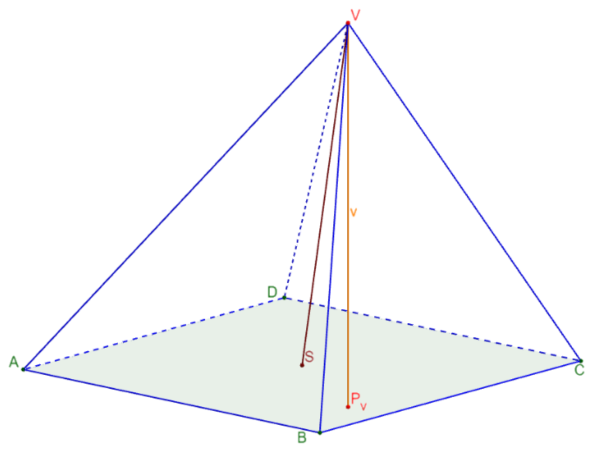


podstava (ABCD) – mnohouholník (podobný s určujúcim útvarom)
výška telesa: v – vzdialenosť vrcholu od podstavy
hrana podstavy (podstavná hrana: AB, BC, CD, DA) – strana podstavy
bočná hrana (AV, BV, CV, DV) – spojnica vrcholu podstavy s vrcholom ihlana
bočná stena (ABV, BCV, …) – je ohraničená susednými bočnými hranami a podstavnou hranou
bočné steny sú to trojuholníky
ich počet sa rovná počtu vrcholov (strán) podstavy
plášť ihlana – súhrn bočných stien

kolmý ihlan – spojnica vrchol-stred podstavy (ťažisko) je kolmá na podstavu (totožná s výškou telesa)



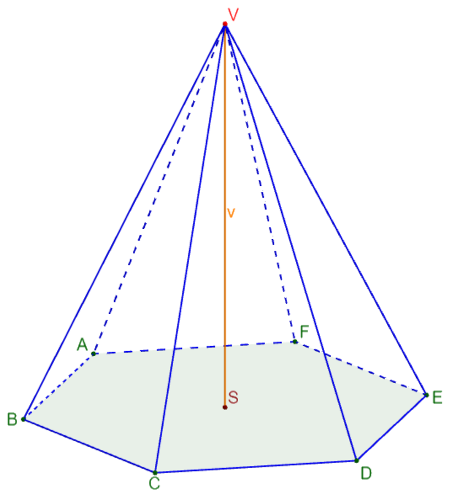
kosý (***šikmý***) ***ihlan*** – ak ihlan nie je kolmý



pravidelný n-boký ihlan – podstava je pravidelný n-uholník a spojnica stred podstavy-vrchol je kolmá na podstavu (totožná s výškou telesa)

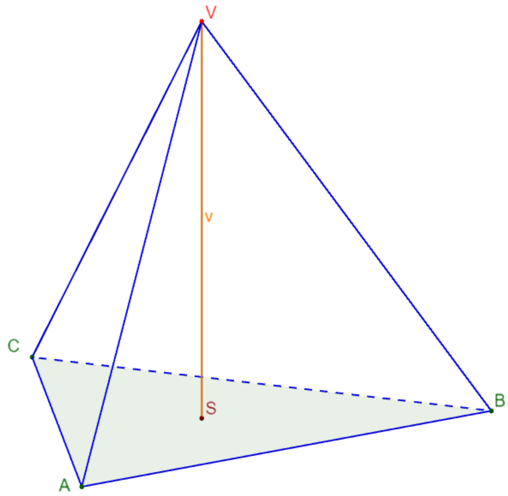
⇒ bočné steny sú rovnoramenné trojuholníky

⇒ bočné steny sú zhodné

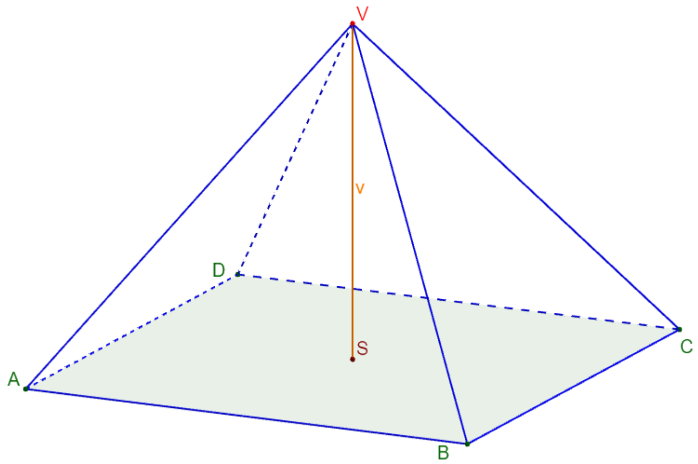


štvorsten (tetraéder) – trojboký ihlan

pravidelný štvorsten – pravidelný trojboký kolmý ihlan, ktorý má všetky hrany zhodné – jedno z piatich pravidelných (Platónskych) telies



pyramída – pravidelný štvorboký kolmý ihlan



všeobecný ihlan:

$S = S_p + S_{pl}$

$V = \frac{1}{3} S_p . v$

pravidelný štvorsten:

$S = \sqrt{3} a^2$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ $\qquad v = \sqrt{\frac{2}{3} a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a^2$

pyramída:

$S = a^2 + 2a \sqrt{\frac{a^2 + 4v^2}{4}}$

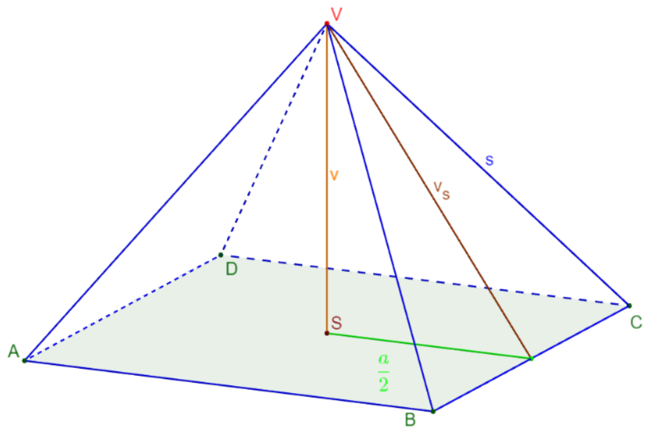
$V = \frac{1}{3} a^2 . v$

príklad:

Daný je kolmý pravidelný štvorboký ihlan: a = 10, s = 13. Vypočítajte povrch a objem.

vypočítame obsah podstavy (štvorca)

$S_p = a^2 = 10^2 = 100$



vypočítame výšku steny Pytagorovou vetou

$v_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$v_s = 12$

vypočítame jednu bočnú stenu a potom povrch plášťa ako štvornásobok

$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} = \frac{10.12}{2} = 60$

$S_{pl} = 4.S_\triangle = 4.60 = 240$

celý povrch je

$S = S_p + S_{pl} = 100 + 240$

S = 340

osový rez cez stredy protiľahlých hrán podstavy obsahuje výšku telesa, výšku steny a polovicu hrany podstavy $\longrightarrow$ Pytagorova veta

$v^2 = v_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119$

$v = \sqrt{119} = 10{,}909$

takže objem bude

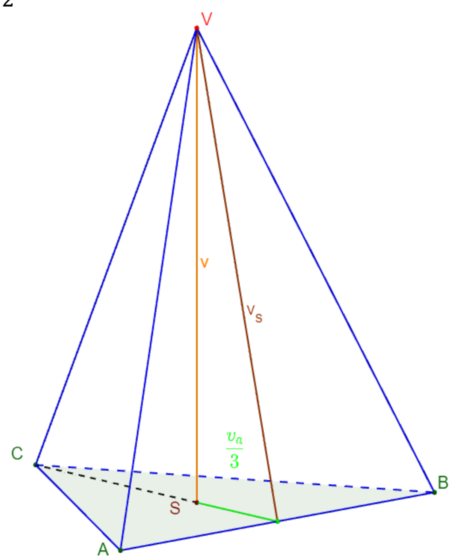
$V = \frac{1}{3}S_p.v = \frac{1}{3}.100.10{,}909$

V = 363,624

Daný je kolmý pravidelný trojboký ihlan: V = 643, v = 12. Vypočítajte hranu podstavy a povrch.

z objemu určíme obsah podstavy

$V = \frac{1}{3}S_p.v \longrightarrow S_p = \frac{3V}{v} = \frac{3.643}{12} = 160{,}75$



z obsahu rovnostranného trojuholníka vypočítame hranu podstavy

$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 \longrightarrow a^2 = \frac{4S_p}{\sqrt{3}} = \frac{4.160{,}75}{\sqrt{3}} = 371{,}236$

a = 19,267

použijeme Pytagorovu vetu na výpočet výšky podstavy

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 19{,}267^2 - 9{,}634^2 = 371{,}236 - 92{,}809 = 278{,}427$$

$v_a = 16{,}686$

výška steny, výška telesa a tretina výšky podstavy tvoria pravouhlý trojuholník $\longrightarrow$ Pytagorova veta

$$v_s^2 = v^2 + \left(\frac{v_a}{3}\right)^2 = 12^2 + 5{,}562^2 = 144 + 30{,}936 = 174{,}936$$

$v_s = 13{,}226$

bočné steny (3) sú trojuholníky – obsah jedného bude

$$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} = \frac{19{,}267.13{,}226}{2} = 127{,}419$$

$S_{pl} = 3.S_\triangle = 3.127{,}419 = 382{,}258$

povrch telesa

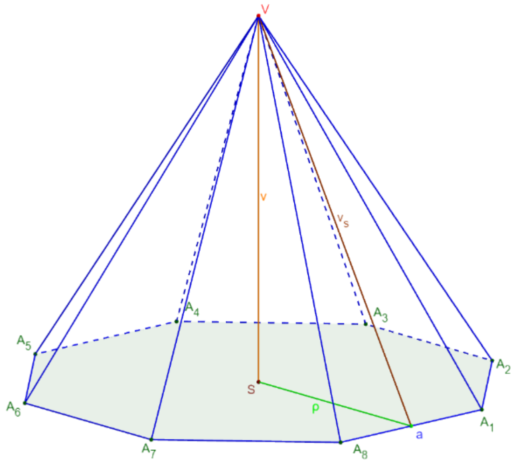
$S = S_p + S_{pl} = 160{,}75 + 382{,}258$

$S = 543{,}008$

Daný je kolmý pravidelný osemboký ihlan: $S_{pl} = 233{,}6$, $a = 5$. Vypočítajte výšku telesa a objem.

obsah plášťa je osemnásobok obsahu bočnej steny

$$S_{pl} = 8.S_\triangle \longrightarrow S_\triangle = \frac{S_{pl}}{8} = \frac{233{,}6}{8} = 29{,}2$$



$$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} \longrightarrow v_s = \frac{2.S_\triangle}{a} = \frac{2.29{,}2}{5} = 11{,}68$$

zo strany osemuholníka určíme polomer vpísanej kružnice ρ

$$\rho = \frac{a}{2\tan\frac{\omega}{2}} = \frac{5}{2\tan 22{,}5°} = 6{,}036$$

v pravouhlom trojuholníku

$$v^2 = v_s^2 - \rho^2 = 11{,}68^2 - 6{,}036^2 = 136{,}422 - 36{,}428 = 99{,}995$$

$v = \sqrt{99{,}995}$

$v = 10{,}000$

obsah podstavy

$$S_p = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{5.6{,}036}{2} = 120{,}711$$

$$V = \frac{1}{3}S_p.v = \frac{1}{3}.120{,}711.10{,}000$$

$V = 402{,}358$