Neurčitý integrál

Doteraz sme sa naučili z „vysokoškolskej“ matematiky limity funkcií a derivácie funkcií, čo sme využili pri analýze funkcií – vyšetrenie priebehu funkcie. Pomocou takejto analýzy môžeme nájsť extrémy, ktoré v živote veľakrát pomôže nám nájsť najlepšie riešenie rôznych problémov; „najkratšiu cestu“.
Teraz pred nami stojí niečo zatiaľ neznáme, pomocou ktorej môžeme „obmerať svet“. Niečo, čo sa využíva pri meraní vzdialeností, uhla, obsahu, povrchu, objemu, atď. Niečo všeobecné, čo je základom toho všetkého. Volá sa neurčitý integrál, alebo primitívna funkcia.

Je to presný opak hľadania derivácie funkcie. Otázka teraz znie: „Čo treba derivovať, aby som dostal funkciu ktorej hľadám neurčitý integrál?“.

D. ***Neurčitým integrálom*** (primitívnou funkciou) funkcie $f(x)$ je funkcia $F(x)$, ak deriváciou funckcie $F(x)$ dostaneme funkciu $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{ak} \quad F'(x) = f(x)$$

pr. $\int 4x^6 - 2x^3 + 5x\,dx \overset{?}{=} x^7 - x^4 + x^2$

$(x^7 - x^4 + x^2)' = 7.x^6 - 4.x^3 + 2.x$

Deriváciou sme nedostali správne koeficienty – iba mocnitele sú správne. Musíme násobením a delením – racionálnym číslom – dosiahnuť správne koeficienty:

$$\left(\frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2\right)' = \frac{4}{7}.7x^6 - \frac{1}{2}.4x^3 + \frac{5}{2}.2x = 4x^6 - 2x^3 + 5x$$

$$\int 4x^6 - 2x^3 + 5x\,dx = \frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2$$

pr. Derivujme funkcie:

a, $(x^3 - 5x^2 + 4x - 1)'$ b, $(x^3 - 5x^2 + 4x + 5)'$ c, $(x^3 - 5x^2 + 4x - 102)'$

a, $(x^3 - 5x^2 + 4x - 1)' = 3x^2 - 10x + 4$

b, $(x^3 - 5x^2 + 4x + 5)' = 3x^2 - 10x + 4$

c, $(x^3 - 5x^2 + 4x - 102)' = 3x^2 - 10x + 4$

$$\int 3x^2 - 10x + 4\,dx \overset{?}{=} \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \\ x^3 - 5x^2 + 4x + 5 \\ x^3 - 5x^2 + 4x - 102 \end{cases}$$

Vidíme, že konštanty, ktoré sme mali vo funkciách integrovaním nevieme určiť – pre rôzne funkcie vychádzajú rovnaké derivácie, a hľadaním neurčitého integrálu tej derivovanej funkcie nemôžeme odhadnúť pôvodnú konštantu. Preto neurčitý integrál funkcie nie je jednoznačný. Tú nevypočítateľnú konštantu uvedieme všeobecne písmenom c – *integračná konštanta*.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,;\ c \in \mathbb{R}$$

Ešte sme nič nehovorili o „dx“ na konci integrálu. My na strednej škole stretneme iba také funkcie, ktoré majú iba jednu premennú. Sú ale aj také, ktoré majú viac premenných.

pr.: $f(x, y) = 4x^5y^2 - 3x^2y + 7x - 8y^3 + 37$

Takúto funkciu môžeme derivovať aj podľa x-u aj podľa y-u – sú to takzvané parciálne derivácie funkcie. Tu už nestačí značiť deriváciu čiarkou. Musíme aj to uviesť, podľa ktorej premennej derivujeme funkciu. Viac spôsobov na to existuje.
Derivujme našu funkciu najprv podľa premennej x. Pritom y funguje ako konštanta (číslo).

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x'(x, y) = 4.5x^4y^2 - 3.2.xy + 7.1 - 8.0 + 0 = 20x^4y^2 - 6xy$$

Teraz podľa premennej y. Tak x figuruje ako konštanta.

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y'(x, y) = 4x^5.2y - 3x^2.1 + 7.0 - 8.3y^2 + 0 = 8x^5y - 3x^2 - 24y^2$$

Preto pri integrovaní musíme uviesť, podľa ktorej premennej prebehla parciálna derivácia.

$f(x) = x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$g(x, y) = 4x^3y \quad \rightarrow \quad g_y'(x, y) = 4x^3$

Keby sme písali bez, potom by sme mohli dostať aj funkciu f aj funkciu g.

$$\int 4x^3 = \begin{cases} x^4 + c \\ 4x^3y + c \end{cases}$$

Keď tam už ale pridáme premennú dx alebo dy, potom neurčitý integrál bude jednoznačný (okrem konštanty).

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + c$$
$$\int 4x^3\,dy = 4x^3y + c$$

V. $\exists \int f(x)\,dx;\ \int g(x)\,dx;\ c \in \mathbb{R}$

a, $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b, $\int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx$

pr.

$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + c$

$(\cos x)' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\,x + c$

$(\mathrm{cotg}\,x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-1}{\sin^2 x}dx = \mathrm{cotg}\,x + c$

$(e^x)' = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + c$

$(a^x)' = a^x.\ln a \quad \Rightarrow \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x.\ln a}dx = \log_a x + c$

pr.

$\int 0\,dx = c$ lebo $(c)' = 0$

$\int 1\,dx = x + c$ lebo $(x)' = 1$

$\int 2\,dx = 2.\int 1\,dx = 2x + c$

$\int 3\,dx = 3.\int 1\,dx = 3x + c$

$\int k\,dx = k.x + c;\ k \in \mathbb{R}$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$ lebo $(x^2)' = 2x$

$\int 2x\,dx = 2.\int x\,dx = 2.\frac{1}{2}x^2 + c = x^2 + c$

$\int 3x\,dx = 3.\int x\,dx = 3.\frac{1}{2}x^2 + c = \frac{3}{2}x^2 + c$

$\int -5x\,dx = -5.\int x\,dx = -5.\frac{1}{2}x^2 + c = -\frac{5}{2}x^2 + c$

$\int -34x\,dx = -34.\int x\,dx = -34.\frac{1}{2}x^2 + c = -17x^2 + c$

$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ lebo $(x^3)' = 3x^2$

$\int 2x^2\,dx = 2.\int x^2\,dx = 2.\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{2}{3}x^3 + c$

$\int 6x^2\,dx = 6.\int x^2\,dx = 6.\frac{1}{3}x^3 + c = 2x^3 + c$

$\int -3x^2\,dx = -3.\int x^2\,dx = -3.\frac{1}{3}x^3 + c = -x^3 + c$

$\int -17x^2\,dx = -17.\int x^2\,dx = -17.\frac{1}{3}x^3 + c = -\frac{17}{3}x^3 + c$

$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$ lebo $(x^4)' = 4x^3$

$\int 3x^3\,dx = 3.\int x^3\,dx = 3.\frac{1}{4}x^4 + c = \frac{3}{4}x^4 + c$

$\int 5x^3\,dx = 5.\int x^3\,dx = 5.\frac{1}{4}x^4 + c = \frac{5}{4}x^4 + c$

$\int -2x^3\,dx = -2.\int x^3\,dx = -2.\frac{1}{4}x^4 + c = -\frac{1}{2}x^4 + c$

$\int -10x^3\,dx = -10.\int x^3\,dx = -10.\frac{1}{4}x^4 + c = -\frac{5}{2}x^4 + c$

$\int x^8\,dx = \frac{1}{9}x^9 + c$ lebo $(x^9)' = 9x^8$

$\int 4x^8\,dx = 4.\int x^8\,dx = 4.\frac{1}{9}x^9 + c = \frac{4}{9}x^9 + c$

$\int 23x^{12}\,dx = 23.\int x^{12}\,dx = 23.\frac{1}{13}x^{13} + c = \frac{23}{13}x^{13} + c$

$\int -9x^{21}\,dx = -9.\int x^{21}\,dx = -9.\frac{1}{22}x^{22} + c = -\frac{9}{22}x^{22} + c$

V. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$

príklad:

$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}.x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}.x^{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{1}{-3}.x^{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$

$\int \frac{3}{x^7}\,dx = \int 3x^{-7}\,dx = 3.\frac{1}{-6}.x^{-6} + c = -\frac{1}{2x^6} + c$

$\int -\frac{4}{x^{10}}\,dx = \int -4x^{-10}\,dx = -4.\frac{1}{-9}.x^{-9} + c = \frac{4}{9x^9} + c$

$\int \frac{1}{8x^{15}}\,dx = \int \frac{1}{8}x^{-15}\,dx = \frac{1}{8}.\frac{1}{-14}.x^{-14} + c = -\frac{1}{112x^{14}} + c$

$\int -\frac{56}{x^{32}}\,dx = \int -56x^{-32}\,dx = -56.\frac{1}{-31}.x^{-31} + c = \frac{56}{31x^{31}} + c$

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}.x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{4}{3}}.x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

$\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{5}{4}}.x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c$

$\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{1}{\frac{8}{5}}.x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$

$\int 11\sqrt[9]{x^{13}}\,dx = 11\int x^{\frac{13}{9}}\,dx = 11.\frac{1}{\frac{22}{9}}.x^{\frac{22}{9}} + c = \frac{9}{2}\sqrt[9]{x^{22}} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{3}}.x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{1}{\frac{4}{5}}.x^{\frac{4}{5}} + c = \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + c$

$\int \frac{5}{6\sqrt[7]{x^8}}\,dx = \int \frac{5}{6}x^{-\frac{8}{7}}\,dx = \frac{5}{6}.\frac{1}{-\frac{1}{7}}.x^{-\frac{1}{7}} + c = -\frac{35}{6\sqrt[7]{x}} + c$

$\int \frac{9}{8\sqrt[13]{x^{10}}}\,dx = \int \frac{9}{8}x^{-\frac{10}{13}}\,dx = \frac{9}{8}.\frac{1}{\frac{3}{13}}.x^{\frac{3}{13}} + c = \frac{39}{8}\sqrt[13]{x^3} + c$