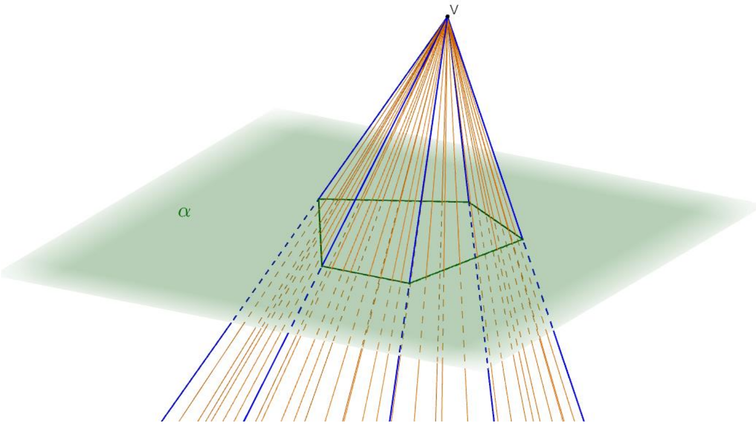
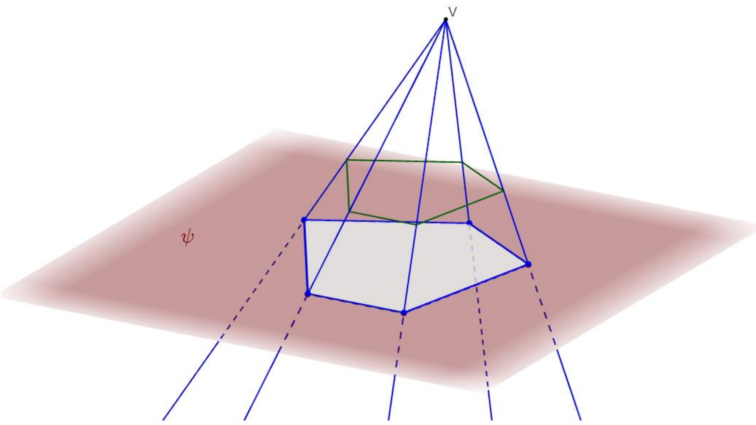
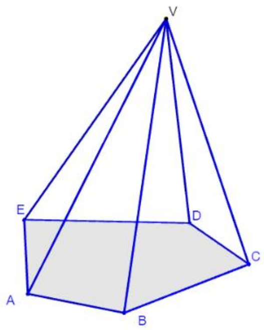
# A gúla felszíne és térfogata
(Povrch a objem ihlana)

**D**. Adott egy sokszög (***vezéralakzat*** – riadiaci/určujúci útvar) és egy pont (***csúcs*** – vrchol), mely nem fekszik a sokszög síkjában. Ha a sokszög határpontjain (oldalain) keresztül V kezdőpontú félegyeneseket veszünk fel, egy végtelen gúlafelületet kapunk – végtelen gúla. Ezek után egy, a gúlafelületet metsző síkkal elmetszve megkapjuk a ***gúlá***t, mint a végtelen gúlafelületnek a csúcs és a sík közé eső részét.

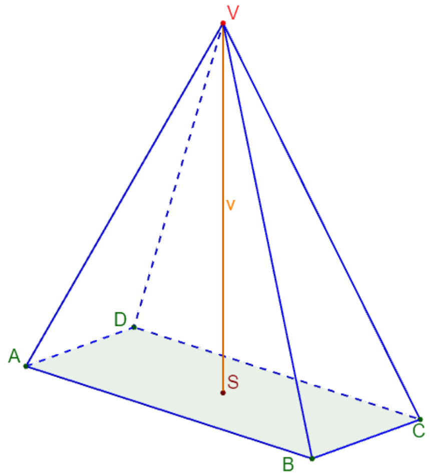


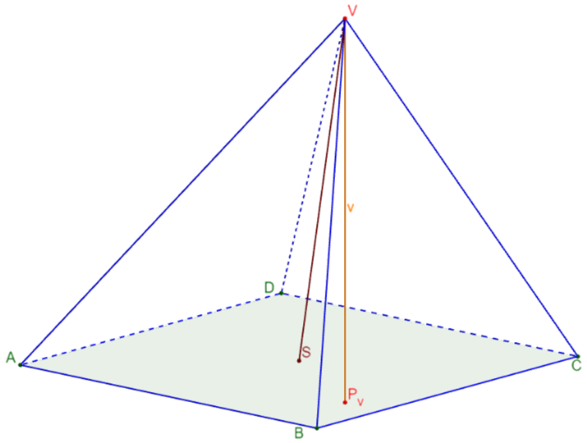




***alaplap*** (podstava) (ABCD) – sokszög (hasonló a vezéralakzattal)
***testmagasság*** (výška telesa): v – a csúcs távolsága az alaplaptól
***alapél*** (hrana podstavy) (az alaplap éle: AB, BC, CD, DA) – az alaplap oldala
***oldalél*** (bočná hrana) (AV, BV, CV, DV) – az alaplap csúcsát a gúla csúcsával összekötő szakasz
***oldallap*** (bočná stena) (ABV, BCV, …) – két szomszédos oldalél és alapél határolja
az oldallapok háromszögek
számuk megegyezik az alaplap csúcsainak (oldalainak) számával
***a gúla palástja*** (plášť ihlana) – oldallapjai összessége

***egyenes gúla*** (kolmý ihlan) – a csúcsot az alaplap középpontjával (súlypont) összekötő szakasz merőleges az alaplapra (azonos a testmagassággal)



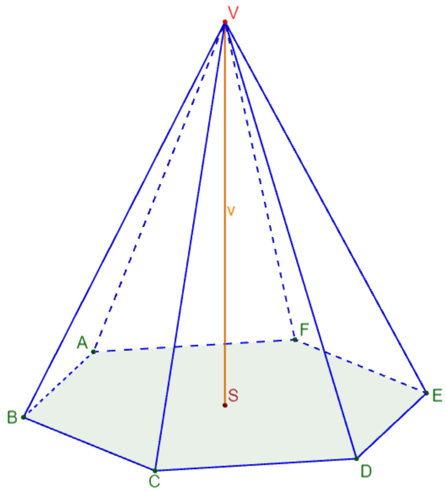

***ferde gúla*** (kosý/šikmý ihlan) – ha nem egyenes a gúla




***szabályos n oldalú gúla*** (pravidelný n-boký ihlan) – alaplapja szabályos n-szög, és az alaplap középpontját a csúccsal összekötő szakasz merőleges az alaplapra (azonos a testmagassággal)

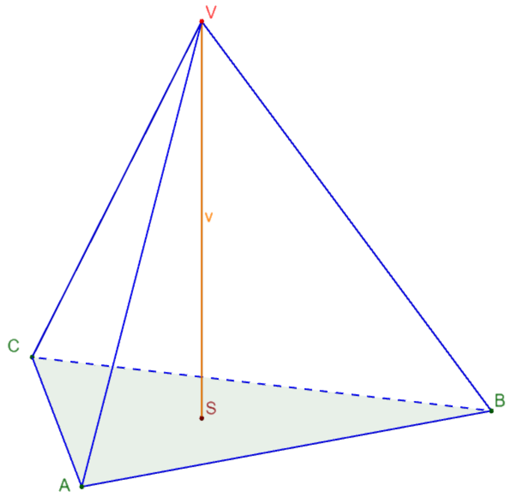
⇒ oldallapjai egyenlő szárú háromszögek

⇒ oldallapjai egybevágóak

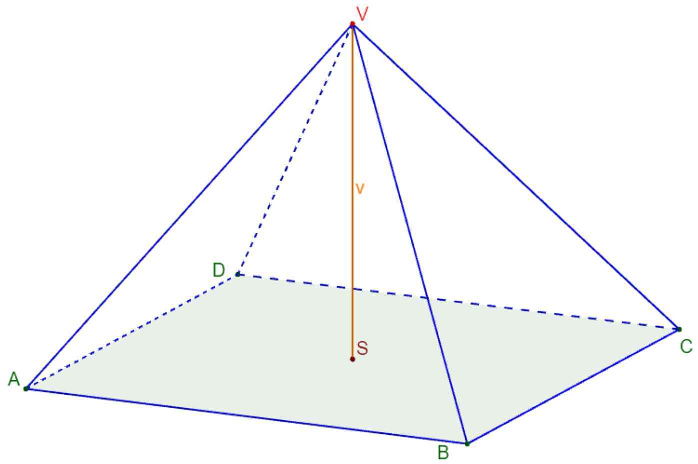



***tetraéder/négylap*** (štvorsten) – háromoldalú gúla

***szabályos tetraéder*** (pravidelný štvorsten) – szabályos háromoldalú gúla, melynek minden éle egybevágó – az öt szabályos (Platóni) test egyike




***piramis*** (pyramída) – szabályos négyoldalú egyenes gúla




általános gúla:

$S = S_p + S_{pl}$

$V = \frac{1}{3} S_p.v$

szabályos tetraéder:

$S = \sqrt{3}a^2$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ $\qquad$ $v = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a^2$

piramis:

$S = a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2+4v^2}{4}}$

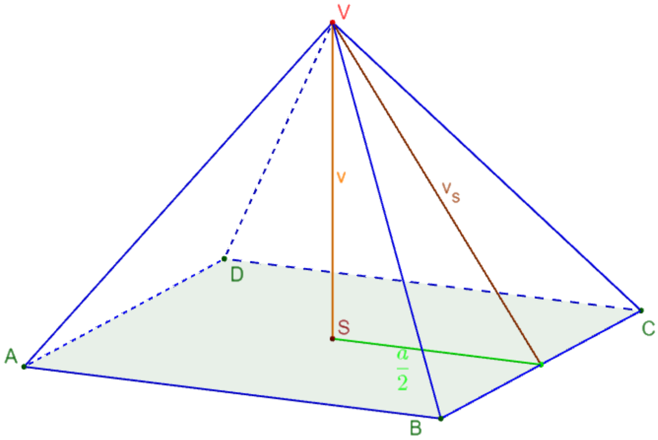
$V = \frac{1}{3}a^2.v$

példa:

Adott egy szabályos négyoldalú egyenes gúla: a = 10, s = 13. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát!

kiszámítjuk az alaplap (négyzet) területét

$S_p = a^2 = 10^2 = 100$




meghatározzuk az oldallap magasságát Pitagorasz tétellel

$$v_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$v_s = 12$$

előbb az egyik oldallap területét számoljuk ki, majd a pálást felszínét ennek négyszereseként kapjuk

$$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} = \frac{10.12}{2} = 60$$

$$S_{pl} = 4.S_\triangle = 4.60 = 240$$

a teljes felszín

$$S = S_p + S_{pl} = 100 + 240$$

$$S = 340$$

a szemközti alapélek felezőpontjain áthaladó tengelymetszet tartalmazza a testmagasságot, az oldallap magasságát és az alapél felét $\rightarrow$ Pitagorasz tétel

$$v^2 = v_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119$$

$$v = \sqrt{119} = 10{,}909$$

tehát a térfogat

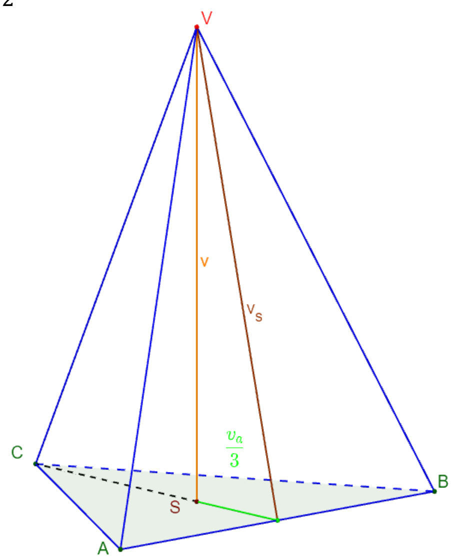
$$V = \frac{1}{3}S_p.v = \frac{1}{3}.100.10{,}909$$

$$V = 363{,}624$$

Adott egy szabályos háromoldalú egyenes gúla: V = 643, v = 12. Számítsuk ki az alapélét és a felszínét!

a térfogatból kiszámítjuk az alaplap területét

$$V = \frac{1}{3}S_p.v \rightarrow S_p = \frac{3V}{v} = \frac{3.643}{12} = 160{,}75$$




az egyenlő oldalú háromszög területéből pedig az alapél hosszát

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 \rightarrow a^2 = \frac{4S_p}{\sqrt{3}} = \frac{4.160{,}75}{\sqrt{3}} = 371{,}236$$

$$a = 19{,}267$$

az alaplap magasságát Pitagorasz tétel segítségével kapjuk meg

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 19{,}267^2 - 9{,}634^2 = 371{,}236 - 92{,}809 = 278{,}427$$

$$v_a = 16{,}686$$

az oldallap magassága, a testmagasság és az alaplap magasságának harmada derékszögű háromszöget alkot $\rightarrow$ Pitagorasz tétel

$$v_s^2 = v^2 + \left(\frac{v_a}{3}\right)^2 = 12^2 + 5{,}562^2 = 144 + 30{,}936 = 174{,}936$$

$$v_s = 13{,}226$$

az oldallapok (3) háromszögek – az egyik területe

$$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} = \frac{19{,}267.13{,}226}{2} = 127{,}419$$

$$S_{pl} = 3.S_\triangle = 3.127{,}419 = 382{,}258$$

a test felszíne

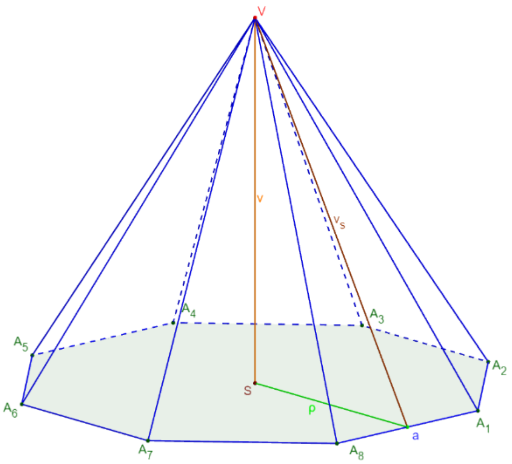
$$S = S_p + S_{pl} = 160{,}75 + 382{,}258$$

$$S = 543{,}008$$

Adott egy szabályos nyolcoldalú egyenes gúla: $S_{pl} = 233{,}6$, $a = 5$. Számítsuk ki a testmagasságot és a térfogatát!

a palást területe az oldallap területének nyolcszorosa

$$S_{pl} = 8.S_\triangle \rightarrow S_\triangle = \frac{S_{pl}}{8} = \frac{233{,}6}{8} = 29{,}2$$




$$S_\triangle = \frac{a.v_s}{2} \rightarrow v_s = \frac{2.S_\triangle}{a} = \frac{2.29{,}2}{5} = 11{,}68$$

a nyolcszög oldalából kiszámoljuk a beírt kör ρ sugarát

$$\rho = \frac{a}{2\tan\frac{\omega}{2}} = \frac{5}{2\tan 22{,}5°} = 6{,}036$$

a derékszögű háromszögben

$$v^2 = v_s^2 - \rho^2 = 11{,}68^2 - 6{,}036^2 = 136{,}422 - 36{,}428 = 99{,}995$$

$$v = \sqrt{99{,}995}$$

$$v = 10{,}000$$

az alaplap területe

$$S_p = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{5.6{,}036}{2} = 120{,}711$$

$$V = \frac{1}{3}S_p.v = \frac{1}{3}.120{,}711.10{,}000$$

$$V = 402{,}358$$